UNIVERZITET U NIŠU
EKONOMSKI FAKULTET
Časopis „**EKONOMSKE TEME**”
Godina izlaženja 50, br. 2, 2012, str. 249-267
Adresa: Trg kralja Aleksandra Ujedinitelja 11, 18000 Niš
Tel: +381 18 528 624 Fax: +381 18 4523 268

MODELI ŽIVOTNOG OSIGURANJA U USLOVIMA KONZISTENTNOG TRŽIŠTA

Bojan Baškot*

Rezime: *U osnovi, osiguranje se može podijeliti na životno i neživotno. Ako usvojimo vrstu rizika kao kriterijum podjele, tada možemo govoriti o osiguranju kapitala za slučaj smrti, osiguranju kapitala za slučaj doživljenja i mješovitom osiguranju kapitala. Isto tako, razlikujemo one vidove životnog osiguranja gdje se osigurana suma plaća u trenutku smrti, sa jedne strane, a sa druge strane imamo životna osiguranja gdje se osigurana suma plaća na kraju perioda u kojem se desio smrtni slučaj. U ovom radu fokus je stavljen na one vrste osiguranja kod kojih se osigurana suma isplaćuje jednokratno. Aktuarska sadašnja vrijednost predstavlja rezultat dvodimenzionalnog posmatranja problematike životnog osiguranja. Sa jedne strane potrebno je odrediti vjerovatnoću da će određena osoba starosti* x *umrijeti. Druga strana problema je sadržana u određivanju sadašnje vrijednosti novčanog iznosa raspoloživog u nekom trenutku u budućnosti.*

Ključne riječi: *aktuarska sadašnja vrijednost, doživotno osiguranje kapitala, odgođeno osiguranje kapitala, privremeno osiguranje kapitala, osiguranje kapitala za slučaj doživljenja, mješovito osiguranje kapitala.*

Uvod

Osnovna podjela osiguranja je na životno i neživotno osiguranje (Šipka, Marović, 2003). Predmet interesa u ovom izlaganju je životno osiguranje. Podjela pojedinih vrsta osiguranja zavisi od kriterijuma koje uzimamo kao osnov. Ako pođemo od načina isplate osigurane sume, odnosno da li se navedena suma isplaćuje jednokratno, ili u vidu sukcesivnih isplata, možemo govoriti o osiguranju kapitala odnosno, osiguranju rente (Kočović, Šulejić, 2002). U ovom izlaganju razmotraćemo modele koji su povezani sa osiguranjem kapitala. Sa aspekta rizika koji je osiguran, može se govoriti o osiguranju kapitala za slučaj smrti, osiguranju kapitala za slučaj doživljenja i mješovitom osiguranju kapitala.

---

* Univerzitet u Banjoj Luci, Ekonomski fakultet, , bojan.baskot@efbl.org
UDK 657.412.6
Primljeno: 05.06.2012. Prihvaćeno: 25.06.2012.

Osiguranje kapitala se dalje može podijeliti na privremeno, gdje se osigurana suma isplaćuje isključivo ukoliko se osigurani slučaj dogodi u okviru određenog vremenskog perioda, odnosno odgođeno osiguranje kapitala, koje podrazumjeva isplatu osigurane sume ukoliko se osigurani slučaj dogodi po proteku određenog vremenskog perioda. Možemo govoriti i o odgođenom privremenom osiguranju kapitala za slučaj smrti, koje podrazumjeva isplatu osigurane sume ukoliko smrt nastupi po proteku određenog vremenskog perioda, ali u okviru narednog, unaprijed određenog vremenskog perioda.

Pretpostavimo da je početna vrijednost kapitala data sa C_0. Na kraju prvog mjeseca ovaj novčani iznos će narasti na $C_0\left(1+\delta/12\right)$. Krajem sljedećeg mjeseca ovaj iznos narašće na $C_0\left(1+\delta/12\right)^2$, i tako dalje, te će krajem godine narasti na $C_0\left(1+\delta/12\right)^{12}$. Ovdje je opisan slučaj nekonzistentnog tržišta, gdje je δ nominalna kamatna stopa koja se obračunava na mjesečnom nivou. Možemo stvari posmatrati drugačije. Recimo da nam je inicijalna vrijednost kapitala C_0 jednaka jednoj novčanoj jedinici. U generalnom slučaju možemo napisati $C_0\left(1+\delta/n\right)^n$, za obračun kamate n puta godišnje. U tom slučaju imamo $\left(1+\delta/n\right)^n \to e^{\delta}$ za $n\to\infty$, gdje je e definisano sa $\lim_{n\to\infty}\left(1+1/n\right)^n$. Ako je $n=\infty$, tada imamo kontinuelni obračun kamate, odnosno zaključujemo da tržište konzistentno. Dekurzivni kamatni faktor je dat sa e^{δ}, a efektivna kamatna stopa sa $i=e^{\delta}-1$. Investirani kapital na kraju godine iznosiće $C_1=C_0e^{\delta}$. U slučaju konzistentnog tržišta kapitala sa δ je definisan intenzitet kamatne stope.

1. Osiguranje kapitala

Osiguranje kapitala se odnosi na one vidove osiguranja kod kojih je osigurana suma isplaćuje jednokratno. Osigurani rizici mogu se odnositi na smrt, ali i na doživljenje osiguranika. Navešćemo pojedine modele osiguranja kapitala.

Označimo sa $t=0$ vrijeme izdavanja polise, a sa Ψ trenutak isplate osigurane sume, odnosno trenutak realizacije osiguranog slučaja. Kao što smo spomenuli, trenutak smrti, odnosno životni vijek osobe je slučajna promjenljiva X. S druge strane, realizacija osiguranog slučaja kod životnog osiguranja može, a ne mora podrazumijevati smrt osiguranog lica, ali u svakom slučaju trenutak isplate osigurane sume Ψ, jeste slučajna promjenljiva. Kao što smo već spomenuli, trenutak smrti osiguranog lica starog x godina, $T=T\left(x\right)$ ne mora da se poklopi sa trenutkom kada treba da bude isplaćena osigurana suma. U skladu sa različitim vrstama proizvoda osiguranja, možemo različito posmatrati i odnos između Ψ i T.

Kod osiguranja kapitala možemo govoriti o slučajevima poklapanja trenutaka smrti, i trenutka isplate osigurane sume, ali isto tako, moguća je situacija da se osigurana suma isplaćuje na kraju godine u kojoj je nastupio osigurani slučaj (ili na kraju m-tog dijela godine), odnosno smrt, kada nam je trenutak isplate osigurane sume jednak $K+1$ (ili $K+\frac{1}{m}$), gdje nam je $K=[T]$. Dakle, sa K smo označili cio dio od T.

Poznato je da da se matematičko tretiranje problematike životnog osiguranja oslanja na teoriju vjerovatnoće (vjerovatnoće smrti, odnosno doživljenja određene starosti), s jedne strane, i koncepta vremenske vrijednosti novca, s druge strane. Ukoliko matematički adekvatno tretiramo određivanje očekivanog trenutka smrti određenog sa T, odnosno očekivanog trenutka isplate osigurane sume Ψ, moramo uzeti u obzir sadašnju vrijednost isplate osigurane sume. U slučaju nekonzistentnog tržišta, poznato nam je da se se nepoznata sadašnja vrijednost nekog novčanog iznosa raspoloživog u budućnosti, određuje pomoću diskontnog faktora v, odnosno sadašnja vrijednost jedne novčane jedinice raspoložive po protoku t godina jednaka je v^t. U uslovima konzistentnog tržišta, isto tako određujemo sadašnju vrijednost novčanog iznosa raspoloživog u poznatom vremenskom trenutku i u poznatom iznosu pomoću diskontnog faktora, koji nešto drugačije definisan od onoga povezanog sa uslovima nekonzistentnog tržišta. Kada govorimo o konzistentnom tržištu tada funkciju kamate određujemo kao neprekidnu, tj. pretpostavljamo kontinuelni slučaj. U tom slučaju moramo na drugačiji način posmatrati obračun kamate, te zaključimo za početak da je sadašnja vrijednost jedne novčane jedinice data sa (Gerber, 1997):

$$e^{-\delta t} \tag{1.1}$$

Dakle, sa izrazom (1.1) definisali smo sadašnju vrijednost jedne novčane jedinice raspoložive po proteku t godina, gdje tržište kapitala konzistentno sa intenzitetom kamate δ.

Polazimo od pretpostavke da kamatna stopa, odnosno intenzitet kamate, nije slučajna promjenljiva, što pojednostavljuje cijeli problem.

Posmatrajmo jednu polisu životnog osiguranja koju je izdala osiguravajuća kompanija pod imenom „Omega osiguranje“. Osiguranik je Petar Marković. On se osigurao da se isplati kapital njegovim nasljednicima, ukoliko se ostvari osigurani slučaj, odnosno manifestuje osigurani rizik u vidu okončanja njegovog života. Možemo zaključiti da se radi o doživotnom osiguranju kapitala za slučaj smrti. Recimo da osigurana suma iznosi jednu novčanu jedinicu. Trenutak isplate osigurane sume, kao i ranije označimo sa Ψ. Kao što rekosmo trenutak isplate osigurane sume je slučajna promjenljiva. Osiguravajuću kompaniju „Omega osiguranje“ interesuje kolika bi trebala biti uplata u sadašnjem trenutku, koja bi bila adekvatna za isplatu jedne novčane jedinice u nepoznatom trenutku Ψ, u uslovima konzistentnog tržišta uz intenzitet kamate δ. Očigledno je da razlika između osigurane sume od jedne novčane jedinice i sadašnje vrijednosti iste osigurane sume zavisi od intenziteta kamate, i samog vremenskog perioda u kom intenzitet kamate djeluje. Pretpostavka je da intenzitet kamate nije slučajna promjenljiva. Sa druge strane, smrt osiguranog lica može se desiti u bilo kom trenutku u budućnosti, sa manjom ili većom vjerovatnoćom, u zavisnosti od konkretnog vremenskog trenutka, ali i od drugih objektivnih okolnosti. Kako ima određena varijabla koja određuje našu sadašnju vrijednost osigurane sume, a koja jeste slučajna, samim tim i sadašnja vrijednost osigurane sume postaje slučajna varijabla. Označimo tu našu slučajnu promjenljivu sa Z. Navedenu slučajnu promjenljivu definišemo izrazom:

$$Z = e^{-\delta\psi}. \tag{1.2}$$

Kako je osigurana suma slučajna promjenljiva, to znači da njenu konkretnu vrijednost ne možemo utvrditi, već da samo možemo govoriti kolike su vjerovatnoće da slučajna promjenljiva uzme određene vrijednosti. Jedino čime se možemo služiti u aktuarskim analizama jeste matematičko očekivanje slučajne promjenljive, odnosno u aktuarskim analizama koristimo očekivanu vrijednost slučajne promjenljive Z definisanu sa izrazom:

$$A = E\{Z\} = E\{e^{-\delta\psi}\}, \tag{1.3}$$

gdje smo sa A označili pojam aktuarske sadašnje vrijednosti. Pojam aktuarske sadašnje vrijednosti odražava oba segmenta perspektive koju aktuarstvo pruža na problematiku životnog osiguranja. Sa jedne strane imamo definisan stohastički proces nastao kao rezultat matematičkog tretiranja vjerovatnoće smrti lica starog x godina, a sa druge strane tu je problem određivanja sadašnje vrijednosti nekog novčanog iznosa koji je raspoloživ u nekom poznatom trenutku u budućnosti. Važno je uočiti da se aktuarska sadašnja vrijednost, može predstaviti kao funkcija generatrisa momenata slučajne promjenljive Ψ (Rotar, 2007, 462):

$$A = E\{e^{-\delta\psi}\} = M_{\psi}(-\delta). \tag{1.4}$$

Kako je $Z = e^{-\delta\psi}$ imamo da je l-ti moment definisan izrazom:

$$E\{Z^{l}\} = E\{e^{-l\delta\psi}\} = M_{\psi}(-l\delta). \tag{1.5}$$

Kako znamo funkciju generatrisu momenata možemo odrediti sve momente, te za $l = 1$ dobijamo:

$$E\{Z\} = E\{e^{-\delta\psi}\} = M_{\psi}(-\delta), \tag{1.6}$$

a za $l = 2$:

$$E\left\{Z^2\right\}=E\left\{e^{-2\delta\psi}\right\}=M_\psi\left(-2\delta\right). \tag{1.7}$$

Sada možemo definisati i varijansu naše slučajne promjenljive:

$$Var\left\{Z\right\}=E\left\{Z^2\right\}-\left(E\left\{Z\right\}\right)^2=M_\psi\left(-2\delta\right)-\left(M_\psi\left(-2\delta\right)\right)^2. \tag{1.8}$$

Ako pođemo od toga da važi $\mu(x)=\mu$, očigledno je da slučajna promjenljiva X ima eksponencijalni raspored. Kako za eksponencijalnu raspodjelu važi svojstvo Lek of memori (Lack of Memory) (Ross, 1997), možemo zaključiti da tada i slučajna promjenljiva $T(x)$ ima eksponencijalnu raspodjelu.

Isto tako, poznato je da je funkcija generatrisa momenata slučajne promjenljive sa ekponencijalnom raspodjelom sa parametrom a data izrazom (Rotar, 2007):

$$M(z)=\int_0^\infty e^{zx}ae^{-ax}dx=\frac{a}{a-z}=\frac{1}{1-\frac{z}{a}}, \tag{1.9}$$

za $z<a$. Za $z\geq a$ funkcija generatrise momenata ne postoji. Dakle, možemo zaključimo da je funkcija generatrisa momenata za slučajnu promjenljivu $T(x)$ data izrazom $M_{T(x)}(z)=\dfrac{\mu}{\mu-z}$.

Dakle, prema (1.3) i (1.9) dobijamo:

$$\bar{A}_x=\frac{\mu}{\mu+\delta}, \tag{1.10}$$

odnosno:

$$Var(Z)=\frac{\mu}{\mu+2\delta}-\left(\frac{\mu}{\mu+\delta}\right)^2. \tag{1.11}$$

Vidimo da za izračunavanje očekivane vrijednosti sadašnje vrijednosti osigurane sume i njene varijanse ne moramo koristiti x, tj. godine starosti, već nam je dovoljno da poznajemo intenzitet smrtnosti i intenzitet kamate.

Ukoliko znamo funkciju raspodjele slučajne promjenljive Ψ, ne samo da možemo odrediti momente slučajne promjenljive Z, već možemo odrediti i njenu funkciju raspodjele. Ako sa $F_\Psi(x)$ označimo funkciju raspodjele slučajne promjenljive Ψ, iz (1.2) slijedi:

$$F_Z(x)=P(Z\leq x)=P\left(e^{-\delta\Psi}\leq x\right)=P\left(\Psi\geq-(\ln x)/\delta\right).$$

1.1. Neposredno doživotno osituranje kapitala za slučaj smrti – osigurana suma se plaća u trenutku smrti

Ovaj model smo spominjali ranije. Dakle, $\Psi = T = T(x)$ za osobu staru x godina. Vrijednost osigurane vrijednosti u inicijalnom trenutku data je izrazom: $Z = e^{-\delta T(x)}$, a aktuarska sadašnja vrijednost osigurane sume:

$$\bar{A}_x = E\left\{e^{-\delta T(x)}\right\} = M_{T(x)}(-\delta). \tag{1.1.1}$$

U relaciji (1.1.1) $M_{T(x)}$ je funkcija generatrisa momenata slučajne promjenljive $T(x)$. Funkcija gustine slučajne promjenljive $T(x)$ (Klugman, Panjer, Willmot, 2004, 36) data je izrazom:

$$f_{T(x)}(t) = \mu_x(t)\,{}_t p_x = \mu(x+t)\,{}_t p_x. \tag{1.1.2}$$

Znajući formulu za dobijanje očekivane vrijednosti na osnovu poznate funkcije gustine raspodjele, izraza (1.1.1) i (1.1.2), dobijamo:

$$\bar{A}_x = \int_0^\infty e^{-\delta t}\mu_x(t)\,{}_t p_x. \tag{1.1.3}$$

Vidjeli smo da u slučaju eksponencijalne raspodjele naše slučajne promjenljive, tj. u slučajevima kada imamo konstantan intenzitet smrtnosti, važi $\bar{A}_x = \dfrac{\mu}{\mu+\delta}$.

Kao što znamo u slučaju kada tražimo aktuarsku vrijednost za dvostruko veći intenzitet kamate važi $E\left\{Z^2\right\} = E\left\{e^{-2\delta T(x)}\right\}$, odnosno uvedimo oznaku ${}^2\bar{A}_x = E\left\{Z^2\right\} = E\left\{e^{-2\delta T(x)}\right\}$. Na osnovu naprijed rečenog varijansu sadašnjih vrijednosti osiguranih suma možemo zapisati na sljedeći način:

$$Var\left\{Z\right\} = {}^2\bar{A}_x - \left(\bar{A}_x\right)^2. \tag{1.1.4}$$

1.2. Neposredno doživotno osigranja kapitala za slučaj smrti – osigurana suma se plaća na kraju godine u kojoj se desio osigurani slučaj

Treba napomenuti da isti model može da se primjeni i na druge vremenske jedinice, odnosno činjenica da se u naslovu pominje godina ne treba da upućuje na ograničenje primjenjivosti modela koji se niže navodi isključivo na vremenske periode izražene u godinama. Poznato je da u ovom slučaju $\Psi = K(x) + 1$.

Važi jednakost $P(K(x) = K) = {}_k p_x q_{x+k}$, na osnovu koje možemo da izvedemo sljedeći izraz za aktuarsku sadašnju vrijednost:

$$A_x = E\left\{e^{-\delta\Psi}\right\} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta(k+1)} P(K(x) = k) = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\delta(k+1)} \times {}_k p_x \times q_{x+k}. \quad (1.2.1)$$

Procijenimo A_{60} za Jugoslovenske demografske tablice 1952 – 1954, i poznato je $\delta = 0,05$ (Šain, Aktuarski modeli životnih osiguranja, 2009). Dakle, dobijamo:

$$P(K(50) = k) = \frac{l_{60+k}}{l_{60}} \frac{d_{60+k}}{l_{60+k}} = \frac{d_{60+k}}{l_{60}}.$$

Možemo se zadovoljiti da nam je $k = 30$ dovoljno veliko. Uvrstimo gore dobijeno u izraz (1.2.1):

$$A_{60} = \sum_{k=0}^{40} e^{-\delta(k+1)} \frac{d_{60+k}}{l_{60}} = 0.242656.$$

Za izračunavanje sadašnje aktuarske vrijednosti možemo koristiti i sljedeći pristup:

$$A_x = e^{-\delta} q_x + p_x e^{-\delta} A_{x+1} = e^{-\delta}\left(q_x + p_x A_{x+1}\right). \quad (1.2.2)$$

Dakle, ako znamo A_n, za neko $n > x$, i p_x, idući „unazad“, možemo izračunati A_x. Relaciju (1.2.2) možemo neformalno dokazati na sljedeći način. Posmatrajmo cijeli procesu odnos u na neki inicijalni trenutak. U odnosu na njega osiguranik može umrijeti u toku prve godine, ili će preživjeti prvu godinu. Vjerovatnoća da će umrijeti u toku prve godine je q_x, a osigurana suma od jedne novčane jedinice ima sadašnju vrijednost od $e^{-\delta}$. Vjerovatnoća da će osiguranik preživjeti prvu godinu je p_x, i osiguranik je tada doživio starost od $x+1$, i osiguranikov život se nastavlja, odnosno osigurani slučaj se nije realizovao, te je aktuarska sadašnja vrijednost osigurane u tom slučaju data sa A_{x+1}. Možemo zaključiti da je aktuarska sadašnja vrijednost osigurane sume u tom slučaju zbir, $e^{-\delta}$ sa vjerovatnoćom q_x, sa jedne strane, i A_{x+1} sa vjerovatnoćom p_x, sa druge strane. Dakle, možemo zapisati:

$$E\{Z\} = E\{Z|T(x) \le 1\} P(T(x) \le 1) + E\{Z|T(x) > 1\} P(T(x) > 1) =$$
$$= E\{Z|T(x) \le 1\} q_x + E\{Z|T(x) > 1\} p_x,$$

uz uslov da važi $E\{Z|T(x) \le 1\} = e^{-\delta}$ i $E\{Z|T(x) > 1\} = e^{-\delta} A_{x+1}$.

Dokažimo da važi $E\{Z|T(x) > 1\} = e^{-\delta} A_{x+1}$. U tom slučaju imamo:

$$E\{Z|T(x) > 1\} = E\left\{e^{-\delta(K(x)+1)}|T(x) > 1\right\} =$$
$$= e^{-\delta} E\left\{e^{-\delta K(x)}|T(x) > 1\right\} = e^{-\delta} E\left\{e^{-(1+\delta K(x+1))}|T(x) > 1\right\} =$$
$$= e^{-\delta} E\left\{e^{-(1+\delta K(x+1))}\right\} = e^{-\delta} A_{x+1}.$$

Iskoristili smo činjenicu da kada osiguranik preživi jednu godinu, njegov očekivani životni vijek je jednak zbiru jedne godine i onom broju godina koji predstavlja očekivano trajanje života izraženom u godinama (cijele godine), nakon što napuni $x+1$ godina.

Analogno slučaju kada se osigurana suma isplaćuje u trenutku smrti u izrazu, za slučaj konstantnog intenziteta smrtnosti i u slučajevima isplate osigurane sume na kraju godine u kojoj se desio osigurani slučaj imamo $A_x = \frac{q_x}{q_x + i}$. Ako pogledamo spomenuti izraz vidimo da ga možemo zapisati na sljedeći način:

$$A_x = \frac{q_x}{q_x + i} = \frac{1 - p_x}{1 - p_x + e^{\delta} - 1} = \frac{1 - p_x}{p_x + e^{\delta}}.$$

Pogledajmo detaljnije odnos između A_x i $\bar{A}_x$. Analiza spomenuog odnosa zasniva se na postupku linearne interpolacije, gdje smo pretpostavili da je životni vijek osiguranika uniformno raspoređen u okviru jedne godine. Može se pokazati da pod ovom pretpostavkom važi:

$$\bar{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x, \tag{1.2.3}$$

gdje je, kao što je ranije navedeno, $i = e^{\delta} - 1$. Sa i smo označili godišnju efektivnu kamatnu stopu, tj. stvaran prinos koji investitor ostvaruje na angažovana sredstva, izražen u svom decimalnom zapisu. Važno je uočiti da za male vrijednosti δ, koeficijent korekcije $\frac{i}{\delta} \to 1$. Pogledajmo kakva je situacija kada $\delta = 0.04$.

Tada je $i = e^{0.04} - 1 \approx 0.04081$, odnosno $\frac{0.04081}{0.04} = 1.02$. Ova karakteristika je sasvim razumljiva ako se sjetimo da važi: $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o\left(x^2\right)$, te ako to iskoristimo, dobijamo:

$$1 \le \frac{i}{\delta} = \frac{e^{\delta} - 1}{\delta} = 1 + \frac{\delta}{2} + o\left(\delta\right). \tag{1.2.4}$$

Ako pogledamo relaciju (1.2.4), možemo zaključiti da $\frac{i}{\delta}$ odstupa od 1 za približno $\frac{\delta}{2}$.

Dokažimo $\overline{A}_x = \frac{i}{\delta} A_x$. Posmatrajmo dvije veličine. Životni vijek u trenutku smrti $T = T\left(x\right)$ i broj cijelih godina doživljenja (možemo ovu veličinu tumačiti i kao „skraćeni" životni vijek u trenutku smrti), $K = K\left(x\right)$. Uvedimo treću veličinu koja se javlja kao razlika između ove dvije (Rotar, 2007) (veće, $T = T\left(x\right)$ i manje $K = K\left(x\right)$). Nazovimo tu veličnu razlomački dio starosti u trenutku smrti izraženog u godinama, te je označimo $T_r\left(x\right)$. Kao što je rečeno: $T_r\left(x\right) = T\left(x\right) - K\left(x\right)$. $K = K\left(x\right)$ i $T_r\left(x\right)$ su međusobno nezavisne slučajne promjenljive i $T_r\left(x\right)$ je uniformno raspoređena na intervalu $\left[0,1\right]$. Možemo zapisati sljedeće:

$$\begin{aligned} \overline{A}_x &= E\left\{e^{-\delta T}\right\} = E\left\{e^{-\delta\left(T_r + K\right)}\right\} = E\left\{e^{-\delta K}\right\} E\left\{e^{-\delta T_r}\right\} = \\ &= e^{\delta} E\left\{e^{-\delta\left(K+1\right)}\right\} E\left\{e^{-\delta T_r}\right\} = e^{\delta} A_x E\left\{e^{-\delta T_r}\right\}. \end{aligned} \tag{1.2.5}$$

Kako je $E\left\{e^{-\delta T_r}\right\} = M_{T_r}\left(-\delta\right)$ gdje je $M_{T_r}\left(-z\right)$ funkcija generatrisa momenata slučajne promjenljive T_r, i kako nam je poznato da važi $E\left\{e^{-\delta T_r}\right\} = \frac{1 - e^{-\delta}}{\delta}$ i (1.2.5), možemo zapisati sljedeću relaciju:

$$\overline{A}_x = e^{\delta} \frac{1 - e^{-\delta}}{\delta} A_x = \frac{e^{\delta} - 1}{\delta} A_x. \tag{1.2.6}$$

Veza između relacije (1.2.6) i relacije (1.2.3) je očigledna.

1.3. Osigurana suma se plaća na kraju m-tog dijela godine

Označimo sa $A_x^{(m)}$ aktuarsku sadašnju vrijednost jedinične osigurane sume koja se isplaćuje na kraju m-tog dijela godine. Predstavićemo aproksimativno određivanje vrijednosti $A_x^{(m)}$ pod pretpostavkom da je životni vijek u trenutku smrti uniformno raspoređen u toku godine. Na osnovu toga možemo zapisati (Bowers, Gerber, Hickman, Jones, Nesbit, 1997):

$$A_x^{(m)} = \frac{i}{i^{(m)}} A_x. \tag{1.3.1}$$

Izraz (1.3.1) smo zapisali jer nam je poznato (1.2.3) a isto tako znamo da važi $\lim_{m\to\infty} i^{(m)} = \delta = \ln(1+i)$, iz čega izvodimo zaključak da se koeficijent korekcije $\frac{i}{i^{(m)}}$ povećava kako se m povećava.

Za bilo koje m važi:

$$0 \le \frac{i}{i^{(m)}} - 1 < \frac{i}{\delta} \le \frac{\delta}{2} + e^2 \frac{\delta^2}{6}. \tag{1.3.2}$$

Vidimo da se koeficijent korekcije može maksimalno povećati do $\frac{i}{\delta}$.

Dokažimo naš izraz za aktuarsku sadašnju vrijednost u slučaju isplate osigurane sume na kraju m-tog dijela godine, u kojoj je nastupio osigurani slučaj. Označimo sa $K^{(m)}$ broj cijelih m-tih perioda godine koje je osiguranik doživio. Uvedimo promjenljivu $R^{(m)} = K^{(m)} - mK$, tj. promjenljivu koja predstavlja doživljeni dio godine u kojoj se desila smrt izraženu u m-tim dijelovima godine. Pogledajmo jednostavan primjer. Stavimo $m=12$, tj. odnosno posmatrajmo dvanaesti dio godine. Uzećemo da je taj dio jednak jednom mjesecu, iako mi govorimo o dvanaest jednakih dijelova godine, a mjeseci imaju nejednak broj dana. Isto tako, recimo da nam je starost posmatranog osiguranika u trenutku starosti $T = 24.48$ izraženo u godinama, što nam daje 293.6 mjeseca. Vidimo da imamo 293 cijela mjeseca, odnosno $K^{(m)} = 293$, a $mK = 288$. Vidimo da posmatrani osiguranik ima proživljenih 5 cijelih mjeseci u 25. godini života, kao i približno 60% proživljenog 6. mjeseca. Možemo zapisati $R^{(m)} = 5$.

Vratimo se opštem slučaju. Kao što smo pretpostavili slučajne promjenljive $R^{(m)}$ i K su međusobno nezavisne, a $R^{(m)}$ uzima vrijednosti $1,2,\ldots,(m-1)$ sa istim vjerovatnoćama. Promjenljiva $R^{(m)}$ uzima spomenute vrijednosti jer je njena vrijednost ograničena na najveći dio osnovne jedinice (u našem slučaju ta promjenljiva može da se odnosi na najviše 11 mjeseci). Kako nam je kamatna stopa stopa određena na godišnjem nivou, moramo uzeti u obzir odgovarajuću relativnu kamatnu stopu (godišnju kamatnu stopu dijelim sa m), te osiguranu sumu diskontujemo za $\left(K^{(m)}-1\right)$.

Na osnovu svega rečenog možemo zapisati:

$$A_x^{(m)} = E\left\{\exp\left\{\frac{-\delta\left(K^{(m)}+1\right)}{m}\right\}\right\} = E\left\{\exp\left\{\frac{-\delta\left(mK+R^{(m)}+1\right)}{m}\right\}\right\} =$$

$$= E\left\{\exp\left\{-\delta K-\frac{\delta\left(R^{(m)}+1\right)}{m}\right\}\right\} = E\left\{\exp\{-\delta K\}\right\}E\left\{\exp\left\{-\delta\left(R^{(m)}+1\right)\Big/ m\right\}\right\} =$$

$$= E\left\{\exp\{-\delta K\}\right\}E\left\{\exp\left\{-\frac{\delta}{m}\left(R^{(m)}+1\right)\right\}\right\} =$$

$$= e^{\delta}E\left\{\exp\{-\delta(K+1)\}\right\}E\left\{\exp\left\{-\frac{\delta}{m}\left(R^{(m)}+1\right)\right\}\right\} = A_x e^{\delta}E\left\{\exp\left\{-\frac{\delta}{m}(R+1)\right\}\right\}.$$

Izraz $E\left\{\exp\left\{-\frac{\delta}{m}(R+1)\right\}\right\}$ prema (1.1.1) možemo zapisati i kao $M_{R^{(m)}+1}\left(\frac{-\delta}{m}\right)$, gdje nam je $M_{R^{(m)}+1}(z)$ funkcija generatrise momenata slučajne promjenljive $R^{(m)}+1$.

Kako znamo da slučajna promjenljiva može uzeti vrijednosti $1,2,\ldots,m$ sa jednakim vjerovatnoćama možemo zapisati sljedeću relaciju:

$$M_{R^{(m)}+1}(z) = \sum_{k=1}^{m} e^{zk}\frac{1}{m} = \frac{1}{m}e^{z}\frac{1-e^{mz}}{1-e^{z}}. \tag{1.3.3}$$

1.4. Odgođeno doživotno osiguranje kapitala za slučaj smrti

U ovom slučaju se osigurana suma isplaćuje samo ako se osigurani slučaj desi po proteku c godina. Kao što je ranije rečeno, ako se ne ostvari uslov neophodan za isplatu osigurane sume stavljamo $\Psi=\infty$. Dakle, za $T(x)<c$

imamo $\Psi = \infty$, a u suprotnom za $T(x) \geq c$ imamo $T(x) = \Psi$. Slučaj kada imamo $T(x) = c$ i nema smisla posebno razmatrati, ukoliko razmatramo promjenljivu koja ima neki neprekidni raspored. Kako znamo da je $Z = e^{-\delta\Psi}$, možemo zapisati:

$$Z = \begin{cases} 0 & T(x) \leq c \\ e^{-\delta T(x)} & T(x) > c \end{cases}. \tag{1.4.1}$$

Posmatrajmo situaciju gdje je osigurani slučaj nastupio prije protoka c godina, i $\delta = 0{,}1$. Tada nam je sadašnja vrijednost osigurane sume jedne novčane jedinice data izrazom $Z = e^{-\delta\Psi} = e^{-0.1*\infty} = 0$. Šta ako je prinos na kapital jednak nuli, tj. $\delta = 0$, tj. $\delta = \ln(1+i) = \ln(1+0)$? Tada u eksponentu Neperovog broja dobijamo neodređen izraz $0 \times \infty$. Međutim, kako je eksponencijalna funkcija „brže“ raste od logaritamske, dobićemo u eksponentu $-\infty$, što nam daje osiguranu sumu jednaku nuli.

Označimo aktuarsku sadašnju vrijednost u ovom slučaju sa:

$$_{c|}\overline{A}_x = {}_c p_x e^{-\delta c} \overline{A}_{x+c}. \tag{1.4.2}$$

Kao što vidimo aktuarsku sadašnju vrijednost u slučaju odgođenog osiguranja kapitala za slučaj smrti možemo predstaviti kao proizvod „obične“ aktuarske vrijednosti osigurane sume (gdje kao polaznu starost ne uzimamo onu koja je stvarna već je uvećavamo za broj godina odgode) i vjerovatnoće da će posmatrano osigurano lice „preživjeti“ odgodu, i sve to diskontovano za broj godina odgode.

Zapišimo gore rečeno na sljedeći način (Rotar, 2007):

$$\begin{aligned} E\{Z\} &= 0 \times P(T(x) \leq c) + E\{Z \mid T(x) > c\} \times P(T(x) > c) = \\ &= E\left\{e^{-\delta T(x)} \mid T(x) > c\right\} {}_c p_x = {}_c p_x E\left\{e^{-\delta(k+T(x+c))}\right\} = \\ &= {}_c p_x e^{-\delta c} E\left\{e^{-\delta T(x+c)}\right\} = {}_c p_x e^{-\delta c} \overline{A}_{x+c}. \end{aligned} \tag{1.4.3}$$

Pogledajmo sljedeći primjer.

Osiguranik je ugovorio osiguranje od jedne novčane jedinice koja se treba isplatiti u trenutku smrti njegovim nasljednicima, pod uslovom da osigurani slučaj nastupi po proteku 5 godina od uplate jednokratne premije. Poznato je da je $\delta = 0.1$ i $\mu = 0.04$. Kolika je varijansa sadašnje vrijednost spomenute osigurane sume? Možemo zapisati:

$$c = 5$$
$$\delta = 0.1$$
$$\mu = 0.04$$
$$Var(Z) = ?$$

$$E\{Z\} = e^{-\mu c} e^{-\delta c} \bar{A}_{x+c} =$$
$$= e^{-c(\mu+\delta)} \frac{\mu}{\mu+\delta} \approx 0.1419$$
$$E\{Z^2\} = e^{-\mu c} e^{-\delta 2c}\, {}^2\bar{A}_{x+c} =$$
$$= e^{-k(\mu+2\delta)} \frac{\mu}{\mu+\delta} \approx 0.0502$$
$$Var(Z) = E\{Z^2\} - (E\{Z\})^2 \approx 0.0502 - (0.1419)^2 \approx 0.0301.$$

Posmatrajmo slučaj u kom se osigurana suma plaća na kraju perioda u kojem se desio osigurani slučaj. Možemo zapisati:

$$\begin{aligned} \Psi &= \infty && \Leftrightarrow T(x) \le c \Rightarrow Z = 0 \\ \Psi &= K(x) + 1 && \Leftrightarrow T(x) > c \Rightarrow Z = e^{-\delta(K(x)+1)}. \end{aligned} \tag{1.4.4}$$

Uvodimo oznaku:

$$_{c|}A_x = \sum_{c=k}^{\infty} e^{-\delta(k+1)} * P(K(x) = k).$$

Gore navedena relacija može se isto tako napisati na sljedeći način (Rotar, 2007):

$$_{c|}A_x = {}_c p_x e^{-\delta c} A_{x+c}. \tag{1.4.5}$$

Kako je broj perioda za koje se vrši diskontovanje sada cio broj možemo zapisati:

$$_{c|}A_x = {}_c p_x v^c A_{x+c}. \tag{1.4.6}$$

1.5. Privremeno osiguranje kapitala za slučaj smrti – osigurana suma se plaća u trenutku smrti

U ovom slučaju osiguranik želi da osigura da se isplati osigurana suma od jedne novčane jedinice njegovim nasljednicima ukoliko smrt nastupi u toku n godina. Dakle, možemo zapisati:

$$\begin{aligned} &\left(\Psi=\infty \quad \Leftrightarrow T(x)\le n\right) \quad \Rightarrow Z=e^{-\delta T(x)}, \\ &\left(\Psi=T(x)\Leftrightarrow T(x)>n\right) \quad \Rightarrow Z=0. \end{aligned} \tag{1.5.1}$$

Uvodimo sljedeću oznaku:

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}=\int_0^n e^{-\delta t} f_{T(x)}(t)\,dt. \tag{1.5.2}$$

Aktuarska sadašnja vrijednost u ovom slučaju zavisi od raspodjele slučajne promjenljive u intervalu $[0,n]$ i ne zavisi od stope smrtnosti poslije navršenih n godina (Rotar, 2007).

Na raspolaganju je i sljedeća formula:

$$\bar{A}_x=\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}+e^{-\delta n}\,{}_n p_x \bar{A}_{x+n}, \tag{1.5.3}$$

odnosno:

$$\bar{A}^{1}_{x:\overline{n|}}=e^{-\delta n}\,{}_n p_x \bar{A}_{x+n}-\bar{A}_x. \tag{1.5.4}$$

Dokaz relacije (1.5.3) je jednostavan, te slijedi iz relacija (1.3.1) i (1.5.1). Ako označimo sa Z_1 slučajnu promjenljivu u (1.3.1), gdje nam je $c=n$, i neka je Z isto kao i u (1.5.1). Zapišimo sljedeće:

$$Z=\begin{cases} e^{-\delta T(x)} & , \quad T(x)\le n \\ 0 & , \quad T(x)>n \end{cases}, \quad Z_1=\begin{cases} 0 & , \quad T(x)\le n \\ e^{-\delta T(x)} & , \quad T(x)>n. \end{cases} \tag{1.5.5}$$

Očigledno je da važi $Z+Z_1=e^{-\delta T(x)}$, što nam je ustvari sadašnja vrijednost osigurane sume od jedne novčane jedinice za slučaj „običnog“ doživotnog osiguranja kapitala za slučaj smrti.

Pogledajmo isti proizvod osiguranja u slučaju da se osigurana suma isplaćuje na kraju godine (ili bilo kojeg drugog vremenskog perioda koji uzet kao osnovni). Dakle za osiguranje kapitala privremeno za n godina dobijamo:

$$Z = \begin{cases} e^{-\delta(K(x)+1)} & , \quad T(x) \le n \\ 0 & , \quad T(x) > n. \end{cases} \tag{1.5.6}$$

Označimo u tom slučaju aktuarsku sadašnju vrijednost sa $A_{x:\overline{n}|}$. Možemo isto tako zapisati sljedeće:

$$A_{x:\overline{n}|} = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\delta(k+1)} P\left(K(x) = k\right) = \sum_{k=0}^{n-1} e^{-\delta(k+1)} {}_n p_x q_{x+k}. \tag{1.5.7}$$

Ako posmatramo (1.5.3) u kontekstu ovog izlaganja dobijamo:

$$A_x = A^1_{x:\overline{n}|} + e^{-\delta n} {}_n p_x A_{x+n}, \tag{1.5.8}$$

odnosno:

$$A^1_{x:\overline{n}|} = e^{-\delta n} {}_n p_x A_{x+n} - A_x. \tag{1.5.9}$$

2. Osiguranje kapitala za slučaj doživljenja

U ovom slučaju osigurana suma se isplaćuje ukoliko osiguranik doživi određenu starost od n godina. Dakle, možemo zapisati, da je $\Psi = n$ za $T(x) > n$, a $\Psi = \infty$ za $T(x) \le n$. Da zaključimo:

$$Z = \begin{cases} 0 & , \quad T(x) \le n \\ e^{-\delta n} & , \quad T(x) > n. \end{cases} \tag{2.1}$$

Označimo aktuarsku sadašnju vrijednost u ovom slučaju ${}_n E_x$, i definišimo je na sljedeći način:

$${}_n E_x = E\{Z\} = e^{-\delta n} P\left(T(x) > n\right) = e^{-\delta n} {}_n p_x. \tag{2.2}$$

U slučaju eksponencijalne raspodjele slučajne promjenljive (konstantan intenzitet smrtnosti) imamo:

$${}_n E_x = e^{-\int_0^n (\mu(x+t)+\delta)dt}. \tag{2.3}$$

U slučaju izraza (2.3) vidimo da ukoliko u ulaznim podacima imamo povećan intenzitet smrtnosti, dobijamo isti efekat kao da nam se povećava intenzitet kamate i obrnuto.

Kako slučajna promjenljiva može imati vrijednost 0 ili neku tačno određenu vrijednost sa vjerovatnoćama q i p respektivno, varijansu spomenute promjenljive možemo definisati na sljedeći način:

$$Var\{Z\} = e^{-\delta 2n}\, {}_n p_x \left(1 - {}_n p_x\right). \tag{2.4}$$

3. Mješovito osiguranje kapitala

U ovom slučaju osigurana suma se isplaćuje osiguraniku ukoliko doživi još n godina, odnosno njegovim nasljednicima ukoliko nastupi njegova smrt u toku n godina.

Ukoliko se osigurana suma isplaćuje nasljednicima tačno u trenutku smrti imamo:

$$Z = \begin{cases} e^{-\delta T(x)} & , \quad T(x) \le n \\ e^{-\delta n} & , \quad T(x) > n. \end{cases} \tag{3.1}$$

Označimo aktuarsku sadašnju vrijednost sa $\overline{A}_{x:\overline{n}|}$. Označimo slučajnu promjenljivu u (1.5.1) sa Z_1, a u (2.1) sa Z_2. Zapišimo sljedeće:

$$Z_1 = \begin{cases} e^{-\delta n} & , \quad T(x) \le n \\ 0 & , \quad T(x) > n, \end{cases} \tag{3.2}$$

odnosno:

$$Z_2 = \begin{cases} 0 & , \quad T(x) \le n \\ e^{-\delta n} & , \quad T(x) > n. \end{cases} \tag{3.3}$$

Vidimo da je tada naša sadašnja vrijednost osigurane sume za slučaj mješovitog osiguranja (slučajna promjenljiva) data sa $Z = Z_1 + Z_2$, te

$$\overline{A}_{x:\overline{n}|} = E\{Z\} = E\{Z_1\} + E\{Z_2\} = \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x = \overline{A}^{1}_{x:\overline{n}|} + e^{-\delta n}\, {}_n p_x. \tag{3.4}$$

U slučaju da se osigurana suma isplaćuje na kraju godine u kojoj se desio osigurani slučaj, imamo:

$$Z = \begin{cases} e^{-\delta(K(x)+1)} & , \quad K(x) < n \\ e^{-\delta n} & , \quad K(x) \ge n. \end{cases} \tag{3.5}$$

Kod mješovitog osiguranja imamo dva slučaja:

1) u slučaju smrti osiguranika u intervalu $[n-1, n)$, osigurana suma će se isplatiti nasljednicima na kraju n-te godine, tj. $t = n$ (kako nam je $n = K - 1$ važi $\min\{K(x)+1, n\} = n$),

2) ako osiguranik doživi starost $x+n$, osigurana suma se isplaćije u n-tom trenutku ($K(x) \geq n$ i važi $\min\{K(x)+1, n\} = n$).

Označimo aktuarsku sadašnju vrijednost u ovom slučaju sa $A_{x:\overline{n}|}$.

Ako povučemo paralelu sa (3.2), odnosno (3.3), u slučaju isplate osigurane sume na kraju godine u kojoj se desio osigurani slučaj (doživljenje ili smrt), dobijamo:

$$Z_1 = \begin{cases} e^{-\delta(K(x)+1)} & , \ K(x) < n \\ 0 & , \ K(x) \geq n \end{cases}, \tag{3.6}$$

odnosno:

$$Z_2 = \begin{cases} 0 & , \ K(x) < n \\ e^{-\delta n} & , \ K(x) \geq n. \end{cases} \tag{3.7}$$

Dakle, imamo:

$$A_{x:\overline{n}|} = A^1_{x:\overline{n}|} + {}_nE_x = A^1_{x:\overline{n}|} + e^{-\delta n}\, {}_np_x. \tag{3.8}$$

Ako izraz (3.8) posmatramo u slučaju kada nam je intenzitet kamate dvostruko veći dobijamo:

$${}^2A_{x:\overline{n}|} = {}^2A^1_{x:\overline{n}|} + {}^2_nE_x = {}^2A^1_{x:\overline{n}|} + e^{-2\delta n}\, {}_np_x. \tag{3.9}$$

Izraz (3.9) omogućava jednostavno izračunavanje varijanse za našu slučajnu promjenljivu.

Ako nam je intenzitet smrtnosti konstantan imamo:

$${}_nE_x = e^{-n(\mu+\delta)}. \tag{3.10}$$

Izraz po (1.5.2) može se definisati i na sljedeći način ukoliko nam je intenzitet smrtnosti konstantan:

$$\overline{A}^1_{x:\overline{n}|} = A_x\left(1 - {}_nE_x\right),$$

dok za slučaj isplate osigurane sume na kraju godine u kojoj se desio osigurani slučaj imamo (Batten, 2005):

$$\overline{A}^1_{x:\overline{n}|} = A_x\left(1 - {}_nE_x\right).$$

Zaključak

Moderna ekonomska perspektiva zahtjeva evoluciju modela životnog osiguranja. Deterministički modeli zasigurno imaju svoje mjesto u budućnosti, međutim treba imati na umu da finasijska tržišta prolaze kroz promjene istorijskih razmjera, što postavlja ozbiljne izazove pred ekonomsku teoriju, ali i praksu.

Ukoliko finanijska tržišta posmatramo kao konzistentna, tada nam je funkcija kamatne stope data kao neprekidna. U tom slučaju uvodimo pojam intenziteta kamate, što je sinonim za kamatnu stopu. Ako nam je funkcija kamate data kao neprekidna, tada je moguć stohastički pogled na problematiku kojom se bavi teorija kamate, odnosno kamatna stopa nam je tada definisana kao slučajna promjenljiva.

Ekstremna volatilnost finansijskih tržišta je realnost. To treba prihvatiti kao činjenicu. Upravo ta činjenica predstavlja pretnju za bogatsvo koje je akumulisalo više generacija. Finansije prepoznaju novac kao mjeru bogatstva. Novac je beskoristan kad je nagomilan i stavljen van upotrebe. Novac mora biti razbacan kroz razne investicione poduhvate. Volatilnost jeste prijetnja, ali istovremeno je i šansa. U ekonomiji postoje rasući i opadajući trendovi, što treba prihvatiti kao neminovnost, koja mora biti tretirana kako prilika. Takva prilika nije hazarderska prilika. To je prilika koje zahtjeva naučan pristup.

Ekstremna volatilnost nameće potrebu za ekstremnim naučnim metodama.

Literatura

1. Batten, R. W. (2005). *Life Contingencies: A Logical Aproach to Actuarial Mathematics.* Winsted: ACTEX Publications, Inc.
2. Bowers, N. L., Gerber, H. U., Hickman, J. C., Jones, D. A., Nesbit, C. J. (1997). *Actuarial Mathematics.* Schaumburg: The Society of Actuaries.
3. Gerber, H. U. (1997). *Life Insurance Mathematics.* Berlin: Springer.
4. Klugman, S. H., Panjer, H. H., & Willmot, G. E. (2004). *Loss Models: From Data to Decision.* Hoboken: John Wiley & Sons, Inc.
5. Kočović, J., Šulejić, P. (2002). *Osiguranje.* Beograd: Ekonomski fakultet.
6. Moller, T., Steffensen, M. (2007). *Market-Valuation Methods in Life and Pension Insurance.* Cambridge: Cambridge University Press.
7. Paramenter, M. M. (1999). *Theory of interest and Life Contingencies With Pension Applications.* Winsted: ACTEX Publications.
8. Ross, S. M. (1997). *Introduction to Probability Models.* San Diego: Academic Press.
9. Rotar, V. I. (2007). *Actuarial models: The Mathematics of Insurance.* Boca Raton: Chapman & Hall.
10. Vaughan, E. J., Vaughan, T. M. (2008). *Fundamentals of Risk and Insurance.* Hoboken: John Willey & Sons, Inc.
11. Šain, Ž. (2009). *Aktuarski modeli životnih osiguranja.* Sarajevo: Ekonomski fakultet.
12. Šipka, D., & Marović, B. (2003). *Ekonomika osiguranja.* Banja Luka: Ekonomski fakultet.

LIFE INSURANCE MODELS FOR CONSISTENT MARKET

Abstract: Basically, insurance can be divided on life and non-life insurance. If we consider risk as criteria for division, than we can talk about whole life insurance, endowment and pure endowment. We can talk about case where benefit is payable in the moment of death. Also, we can talk about case where benefit is payable at the end of the period of death. There are two types of whole life insurance. The first is term insurance and the second type is deferred whole life insurance. In this presentation main focus of observation are those insurance products with benefit payable as lump sum. Actuarial present value represents both segments of actuarial perspective on life insurance as two sided problem. On one side, there is the problem of defining the probability that some person will die at age . Second side of problem is defining present value of sum payable at some moment in future.

Keywords: actuarial present value, whole life insurance, deferred life insurance, term life insurance, endowment, whole life insurance and endowment combination.